



Л. І. Мочурад, П. Я. Пукач

Національний університет "Львівська Політехніка", м. Львів, Україна

## АПОСТЕРІОРНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ПОХИБКИ І РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ

На модельному прикладі розглянуто апостеріорний метод оцінювання похибки і процедуру розпаралелення для чисельного розв'язування одного класу задач електронної оптики. Враховано той факт, що поверхня, на якій визначено крайові умови, володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Вдосконалено загальну методіку, яка ґрунтується на методі інтегральних рівнянь. Специфіку змодельованої проблеми враховано на підставі апарату теорії груп. Використовуючи апарат теорії груп, вдалось звести вихідну задачу до розв'язування послідовності шістнадцяти незалежних інтегральних рівнянь, де інтегрування ведеться тільки по одній з конгруентних складових поверхні. Це створило всі передумови до розпаралелення процедури розв'язування задачі загалом. Процедуру розпаралелення проведено з використанням програмного засобу *OpenMP*. Для отримання наближених значень шуканої "густини розподілу зарядів" у відповідних двовимірних інтегральних рівняннях використано метод колокації. З метою врахування сингулярної поведінки розв'язку в околі контуру розімкненої поверхні побудовано апостеріорний метод оцінювання похибки. Для підтвердження доречності та оцінки ефективності методіки проведено ряд чисельних експериментів.

**Ключові слова:** математичне моделювання; абелева група симетрії; інтегральні рівняння; багатоядерність процесора; програмний засіб *OpenMP*.

**Вступ.** Моделювання більшості електронно-оптичних систем потребує чисельного аналізу параметрів електростатичного поля, створюваного цими системами. При цьому не проста структура поля, притаманна сучасним пристроям, істотно ускладнює традиційне застосування методу інтегральних рівнянь, а розімкненість граничних поверхонь-електродів змушує коло чисельних методів, які адекватно враховували б фізичну природу досліджуваного явища.

Помічено (Zakharov, Safronov, & Tarasov, 1992; Плутова, 2000), що більшості електронно-оптичних систем притаманна геометрична симетрія. Останнє дає змогу трактувати проблему як задачу з абелевою групою симетрії скінченного порядку. Застосування апарату теорії груп (Serre, 1977) при чисельному розв'язуванні відповідних інтегральних рівнянь дає змогу істотно знизити порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні. Це, водночас, дає змогу уникнути нестійкості розрахунків і, отже, розширює коло проблем, що допускають чисельне моделювання з використанням методу інтегральних рівнянь.

За відсутності універсального підходу до розв'язування задач, що володіють різними групами симетрії, ефективним виявилось виділення класів крайових задач, які володіють тою чи іншою скінченною групою

симетрії. При цьому чисельне розв'язування типового модельного прикладу із певного класу дає змогу добре проілюструвати всі аспекти запровадженої методіки.

Предметом окремих досліджень є побудова ефективних чисельних алгоритмів для знаходження густини розподілу зарядів. Адекватне математичне моделювання відповідного поля передбачає врахування характеру поведінки шуканої густини розподілу зарядів поблизу контуру розімкненої поверхні та на лінії її зламу. Наявна симетрія в геометрії сукупної розімкненої поверхні дає змогу значно зменшити кількість контрольованих "особливих" точок, а точніше в найкращому випадку дає змогу мати справу тільки з однією. Не зменшуючи загальності, подамо результати чисельного розв'язування однієї модельної задачі електростатики з використанням апостеріорного методу оцінювання похибки, запровадженого в роботі (Mochurad, Harasym, & Ostudin, 2009), і процедури розпаралелення (Mochurad, 2013).

**Постановка просторової задачі.** Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи. На рис. 1 представлено одну із можливих конфігурацій квадрупольної системи. Зазвичай, задача моделювання розрахунку електростатичного поля цієї системи

### Інформація про авторів:

**Мочурад Леся Ігорівна**, асистент кафедри інформаційних систем і технологій. Email: lesiamochurad@gmail.com

**Пукач Петро Ярославович**, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри обчислювальної математики та програмування. Email: ppukach@gmail.com

**Цитування за ДСТУ:** Мочурад Л. І., Пукач П. Я. Апостеріорний метод оцінювання похибки і розпаралелення обчислень для одного класу задач електронної оптики. Науковий вісник НЛТУ України. 2017. Вип. 27(5). С. 155–159.

**Citation APA:** Mochurad, L. I., & Pukach, P. Ya. (2017). The a posteriori method of error evaluation and parallelization of calculating for one class of problems of the electronic optics. Scientific Bulletin of UNFU, 27(5), 155–159. <https://doi.org/10.15421/40270530>

передбачає знаходження розподілу потенціалу. У перерізі електроди цієї лінзи мають форму гіпербол. На поверхні електродів електростатичний потенціал сталий. Його сталість досягається перерозподілом зарядів.

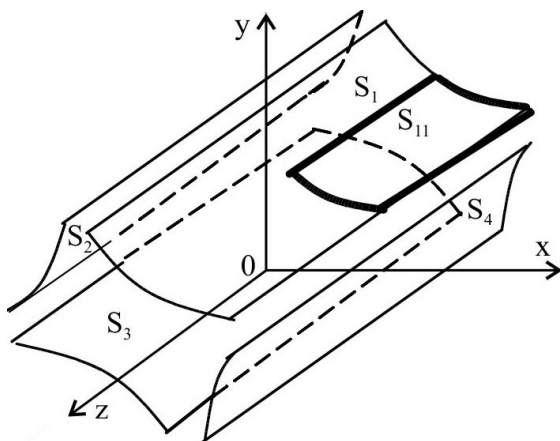


Рис. 1. Досліджувана квадрупольна система

У процесі математичного моделювання подамо відповідну систему електродів у вигляді такої сукупності чотирьох гладких незамкнених поверхонь, що не мають спільних точок:  $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$ . Легко бачити, що поверхні  $S_i$  обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини. Нехай  $P, Q$  і т. д. – точки евклідового простору  $\mathbf{R}^3$ . Тоді, як відомо (Sybil, 1997), згадана вище проблема еквівалентна такому інтегральному рівнянню:

$$(K\sigma)(P) \equiv \iint_S \sigma(Q) \cdot K(P, Q) dS_Q = f_k(P), \quad P \in S_k (k = \overline{1, 4}),$$

де  $K(P, Q) \equiv 1/\text{dist}(P, Q)$ ,  $f_k(P)$  – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею  $S_k (f_k(P) \equiv \text{const})$ , а  $\sigma(Q)$  – шукана сукупна "густина розподілу зарядів" на  $S$ :  $\sigma(Q) = \{\sigma_i(Q), Q \in S_i; i = \overline{1, 4}\}$ . Якщо  $S$  – незамкнена ліпшицева поверхня в  $\mathbf{R}^3$ , що відповідає нашій ситуації,  $K$  – ізоморфізм із  $H_{00}^{-1/2}(S)$  в  $H^{1/2}(S)$ , причому

$$m_1 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \leq \|K\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} (0 < m_1 \leq m_2). \quad (2)$$

Нерівності (2) виражають розв'язуваність інтегрального рівняння (1).

Використовуючи апарат теорії груп (Serre, 1977), можна встановити, що розглядувана задача розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Як результат (1) можна звести до послідовності шістнадцяти незалежних інтегральних рівнянь тільки за конгруентною складовою  $S_{11}$  поверхні  $S$ . Отримані рівняння можна розв'язати методом колокації. При цьому виникає потреба в обчисленні невластивих інтегралів, ускладнених наявністю певних вагових функцій, які відображають сингулярні властивості шуканого розв'язку. Позбавитись цих особливостей можна шляхом запровадження спеціальних заміни змінних у відповідних подвійних інтегралах. Така процедура значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування розглянутих інтегральних рівнянь. Аналіз ситуації переконує в доцільності використання одного із варіантів так званого ме-

тоду апостеріорної оцінки похибки, який допомагає надійно контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі "особливих" точок. У нашому випадку, врахувавши геометричну симетрію поверхонь-електродів, вдалось істотно зменшити кількість "особливих" точок із шістнадцяти до однієї. Очевидною перевагою розглядуваного підходу є також створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування задачі загалом.

**Апостеріорний метод оцінювання похибки наближених розв'язків інтегральних рівнянь.** Не зменшуючи загальності, розглянемо одне із шістнадцяти незалежних інтегральних рівнянь:

$$(A_1 \bar{G}_1)(u_0, v_0) \equiv \iint_{D_1} K_1(u, v, u_0, v_0) \bar{G}_1(u, v) dudv = \bar{\psi}_1(u_0, v_0), \quad (3)$$

$$(u_0, v_0) \in (0, 1) \times (0, A), \quad D_1 = [0, 1] \times [0, A], \quad 0 < A < +\infty.$$

Наближене розв'язування цього рівняння здійснюємо методом колокації, використовуючи для апроксимації шуканого розв'язку кусково-постійні базисні функції. Поділ на елементи проводимо відносно  $D_1 = [0, 1] \times [0, A]$ . Через апріорну інформацію про характер поведінки  $\bar{G}_1(u, v)$  "екстремальним" вважаємо елемент  $D_{N_u N_v} \equiv [1 - h_u, 1] \times [A - h_v, A]$ , який відповідає кутовій точці складової  $S_{11}$  (див. рис. 1). Тут  $h_u = 1/N_u$ ,  $h_v = 1/N_v$ , де  $N_u, N_v$  – кількість точок поділу відрізків  $[0, 1]$ ,  $[0, A]$ , відповідно. Треба зауважити, що без урахування наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь, повинні були б взяти до уваги особливості шуканого розв'язку в околі шістнадцяти кутових точок поверхні  $S$ , що істотно ускладнює весь алгоритм обчислень.

Відомо (Morrison & Lewis, 1976), що "густина розподілу зарядів"  $\bar{G}_1(u, v)$  в околі кутової точки  $Q \equiv (1, A)$  і при підході до контуру має особливості, які можна врахувати шляхом запровадження у відповідних подвійних інтегралах такої вагової функції:

$$\Omega(u, v) = \frac{\sqrt{(1-u)(A-v)}}{(1-u)^\gamma + (A-v)^\gamma}, \quad \text{де } \gamma \approx 1,7034.$$

Від цієї особливості можна позбавитись шляхом використання спеціальних заміни змінних. Проте це значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування інтегрального рівняння і не дає змоги скористатись простою та ефективною чисельно-аналітичною схемою (Garasym & Ostudin, 2003). Тому будемо враховувати цю особливість методом згущення сітки в околі особливої точки  $Q$  для досягнення заданої точності, спираючись на загальні ідеї, висвітлені в роботах (Eriksson et al., 1995; Carstensen et al., 2004).

Припустимо, що внаслідок розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимує досліджуване операторне рівняння, отримано наближений розв'язок  $\bar{G}_{1\epsilon}(P)$ ,  $P \equiv (u, v) \in D_1$ , аналіз якого так чи інакше вимагає вивчення властивостей його похибки

$$\epsilon_{G_1} \equiv \bar{G}_1 - \bar{G}_{1\epsilon}.$$

Обмежимо побудовою наближень  $e_{G_1}$  до реальної похибки  $\varepsilon_{G_1}$  за такою схемою. Перевірка задоволення граничної умови полягає в обчисленні потенціалу в деякій контрольній точці  $P_1$ , яка не збігається з точкою колокації і лежить в околі кутової точки складової  $S_{11}$  на "екстремальному" елементі  $D_{N_u, N_v}$  (рис. 2). Далі апроксимуємо функцію похибки  $e_{G_1}$  за формулою  $e_{G_1} = \lambda_1 B_R(u, v)$  і знайдемо невідомий параметр  $\lambda_1$  шляхом колокації (3) саме в точці  $P_1 \equiv \{1 - h_u / 4, A - h_v / 4\}$ :

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\psi}_1(P_1) - (A \bar{G}_1)(P_1)}{(A_1 B_R)(P_1)}. \quad (4)$$

Зауважимо, що такий відносно простий спосіб обчислення параметра  $\lambda_1$  пов'язаний з фінітністю білінійної бабл-функції  $B_R(u, v)$ :

$$\text{supp} B_R(u, v) = D_{N_u, N_v}^{1/4} \equiv \left[1 - \frac{h_u}{2}, 1\right] \times \left[A - \frac{h_v}{2}, A\right].$$

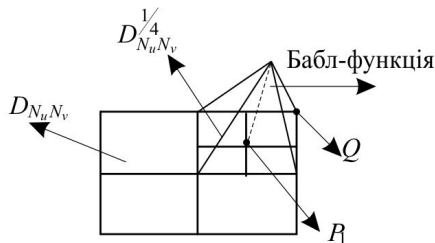


Рис. 2. Схематичне зображення "екстремального" елемента

При обчисленні знаменника у формулі (4) зручно віднести елемент  $D_{N_u, N_v}^{1/4}$  до локальної системи координат  $(\alpha, \beta)$  так, що  $|\alpha| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ . Це дає змогу після представлення  $(A_1 B_R)(P_1)$  у вигляді суми чотирьох інтегралів  $I_1, I_2, I_3, I_4$ :

$$I_1 \equiv \int_{1 - \frac{h_v}{4} - \Delta_1}^{1 - \frac{h_v}{4}} \int_{A - \frac{h_u}{4} - \Delta_2}^{A - \frac{h_u}{4}} K_1(u, v, P_1) \cdot B_R^1(u, v) du dv,$$

$$I_2 \equiv \int_{1 - \frac{h_v}{4}}^{1 - \frac{h_v}{4} + \Delta_1} \int_{A - \frac{h_u}{4} - \Delta_2}^{A - \frac{h_u}{4}} K_1(u, v, P_1) \cdot B_R^2(u, v) du dv,$$

$$I_3 \equiv \int_{1 - \frac{h_v}{4} - \Delta_1}^{1 - \frac{h_v}{4} + \Delta_1} \int_{A - \frac{h_u}{4}}^{A - \frac{h_u}{4} + \Delta_2} K_1(u, v, P_1) \cdot B_R^3(u, v) du dv,$$

$$I_4 \equiv \int_{1 - \frac{h_v}{4} - \Delta_1}^{1 - \frac{h_v}{4}} \int_{A - \frac{h_u}{4}}^{A - \frac{h_u}{4} + \Delta_2} K_1(u, v, P_1) \cdot B_R^4(u, v) du dv,$$

де  $\Delta_1 = \frac{h_u}{4}$ ,  $\Delta_2 = \frac{h_v}{4}$ , в кожному з них виконати деяку заміну змінних. Так, наприклад, для  $I_1$  матимемо

$$u(\alpha, \beta) \equiv \frac{2\left(1 - \frac{h_u}{4}\right) - \Delta_1}{2} + \frac{\Delta_1}{2} \cdot \alpha,$$

$$v(\alpha, \beta) \equiv \frac{2\left(A - \frac{h_v}{4}\right) - \Delta_2}{2} + \frac{\Delta_2}{2} \cdot \beta, \quad -1 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

При цьому відповідні складові бабл-функції у локальних координатах набувають такого вигляду:

$$B^1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 + \beta), \quad B^2(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 + \beta),$$

$$B^3(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 - \beta), \quad B^4(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 - \beta).$$

Запроваджені вище величини для апроксимації похибки на "екстремальному" елементі використовуємо для знаходження наближеного розв'язку (3) з наперед гарантованою точністю, повторюючи подібну процедуру. Критерієм завершення процесу уточнення наближеного розв'язку  $\bar{G}_{1\varepsilon}(P)$  є деякий індикатор

$$\eta_{G_1} \equiv \frac{\|e_{G_1}(u, v)\|_{L_2}}{\sqrt{\|e_{G_1}(u, v)\|_{L_2}^2 + \|\bar{G}_{1\varepsilon}(u, v)\|_{L_2}^2}} \cdot 100\%. \quad (5)$$

Якщо індикатор (5) не перевищує заданого допустимого рівня, то уточнення  $\bar{G}_{1\varepsilon}$  припиняємо, інакше здійснюємо згущення сітки для чергового розв'язання відповідного інтегрального рівняння. У нашому випадку на першому кроці згущення сітки отримуємо чотири нових елемента  $(D_{N_u, N_v}^{1/4})_i, i = \bar{1}, 4$ .

Візуалізацію результатів моделювання розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи з використанням апостеріорного методу оцінювання похибки представлено розподілом ліній рівного потенціалу. Так, рис. 3 відповідає граничним значенням потенціалу  $f_1 = 1, f_2 = -1, f_3 = 1, f_4 = -1$  і відстані між поверхнями  $h = 1$ . Кількість точок колокації  $n = 100$ .

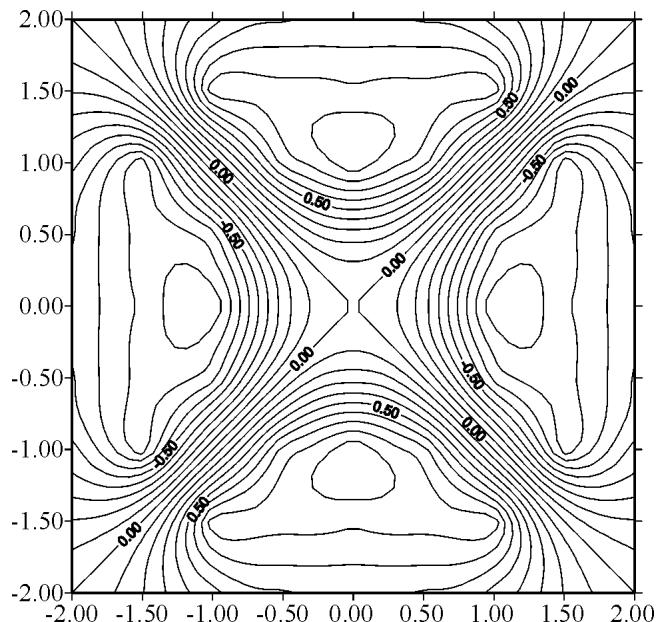


Рис. 3. Розподіл ліній рівня у площині  $x = 0$  при  $A = 1$

У таблиці наведено значення потенціалу в деяких контрольних точках, що розміщені в околі "екстремального" елемента до  $(u_0)$  і після  $(u_1)$  врахування апостеріорного оцінювача похибки за допустимого рівня 10%.

Табл. Потенціал у деяких контрольних точках у випадку кусково-білінійної бабл-функції

| $N_y$ | y<br>z      | 1,4726 | 1,4079 | 1,3486 |
|-------|-------------|--------|--------|--------|
|       |             | 0,9375 | 0,9375 | 0,9375 |
| 4     | $u_0$       | 0,8898 | 0,9367 | 0,9757 |
|       | $u_1$       | 1,0376 | 1,0201 | 1,0078 |
|       | $\lambda_1$ | 0,1478 | 0,0834 | 0,0321 |
|       | $\eta$      | 0,2242 | 0,1267 | 0,0567 |
| 5     | $u_0$       | 0,9108 | 0,9582 | –      |
|       | $u_1$       | 1,0265 | 1,0142 | –      |
|       | $\lambda_1$ | 0,1157 | 0,0560 | –      |
|       | $\eta$      | 0,1740 | 0,0845 | –      |
| 6     | $u_0$       | 0,9545 | –      | –      |
|       | $u_1$       | 1,0149 | –      | –      |
|       | $\lambda_1$ | 0,0604 | –      | –      |
|       | $\eta$      | 0,0899 | –      | –      |

**Розпаралелення процедури розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінії.** На цьому етапі моделювання розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінії отримали шістнадцять незалежних інтегральних рівнянь. Сучасні архітектури багатоядерних процесорів дають змогу розпаралелити процедуру розв'язання цих рівнянь, використавши один із найпопулярніших засобів паралельного програмування *OpenMP* (Voss, 2003). У ньому використовується модель паралельного виконання "розгалуження-злиття". Програма *OpenMP* починається як єдиний потік виконання, що називається початковим потоком. Коли потік зустрічає паралельну конструкцію, він утворює нову групу потоків, що складається із себе та ще кількох додаткових потоків, що стає головним у групі. Після паралельної конструкції виконання користувачького коду продовжує тільки головний потік. Отже, засобами *OpenMP* можна розпаралелити чисельне розв'язування шістнадцяти інтегральних рівнянь, які будуть виконуватись на ядрах комп'ютера окремими потоками. При цьому кількість ядер може не збігатись з кількістю потоків, на які розпаралелюється програма (рис. 4).

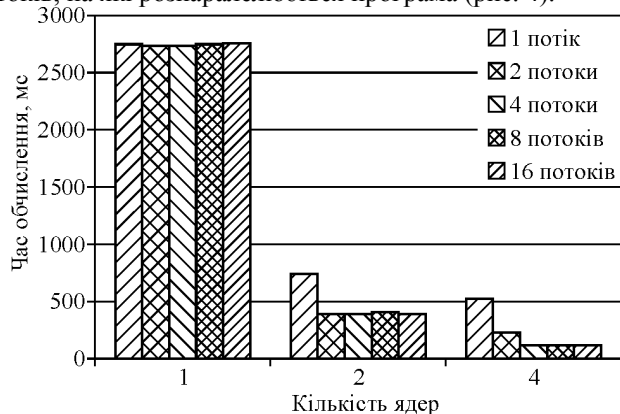


Рис. 4. Залежність часу обчислень від кількості ядер

За результатами чисельних експериментів на комп'ютері з одноядерним процесором час розв'язування задачі за програмою із застосуванням *OpenMP* не істотно відрізняється від часу розв'язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім, шістнадцять потоків, у той час як фізично комп'ютер має одне ядро.

Під час виконання програми на комп'ютері з двоядерним процесором час розв'язування задачі за паралельною програмою приблизно в два рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Часова оцінка у разі збігу кількості потоків і кіль-

кості ядер мало відрізняється від часової оцінки, яку отримують збільшуючи кількість потоків за умов незмінної кількості розв'язуваних рівнянь. Це пояснюють тим, що фізично процесор залишається двоядерним.

Якщо програма виконується на комп'ютері з чотириядерним процесором, то час розв'язування задачі за паралельною програмою приблизно в чотири рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Очевидно, що зі збільшенням кількості ядер ці показники будуть покращуватись. Отже, використання багатоядерності персонального комп'ютера є доцільним при розв'язуванні задач великих розмірностей з метою ефективніших затрат комп'ютерного часу на їх виконання.

**Висновки.** Врахування наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь-електродів дало змогу замість шістнадцяти особливих точок поверхні, в яких необхідно контролювати сингулярну поведінку розв'язку, брати до уваги тільки одну. В околі цього "екстремального" елемента враховано особливість на основі апостеріорного методу оцінювання похибки.

Отримані результати також підтверджують доцільність застосування пакету *OpenMP* для розпаралелення обчислень і вказують на можливість подальшої оптимізації програмного забезпечення для розв'язування цього класу задач за критерієм мінімізації часу розрахунків за рахунок варіації кількості паралельних потоків та процесорних ядер комп'ютера.

#### Перелік використаних джерел

- Carstensen, C., Maischak, M., Praetorius, D., & Stephan, E. P. (2004). Residual-based a posteriori error estimate for hypersingular equation on surfaces. *Numerische Mathematik*, 97(3), 397–425. <https://doi.org/10.1007/s00211-003-0506-5>
- Eriksson, K., Estep, D., Hansbo, P., & Johnson, C. (1995). Introduction to Adaptive Methods for Differential Equations. *Acta Numerica*, 4, 105–158. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002531>
- Garasym, Y. S., & Ostudin, B. A. (2003). On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method. *Zhurn. obchysl. ta prykl. matematyky*, 1(88), 17–28.
- Hlumova, M. V. (2000). Chyselne modelivannia fizychnykh protsesiv u visesymetrychnykh elektronno-promeneyvnykh pryladakh. *Avto-referat na zdobuttia naukovooho stupenia kand. fiz.-mat. nauk*, Kharkiv, 17 p. [in Ukrainian].
- Mochurad, L. (2013). Rozparalelennia protsedur chyselnoho rozv'iazuvannia zadach ploskoi elektrostatyky, yaki maiut abelevi hrupy symetrii skinchennykh poriadkiv. *Visn. Lv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform.*, 20, 34–41. [in Ukrainian].
- Mochurad, L., Harasym, Y., & Ostudin, B. (2009). Maximal Using of Specifics of Some Boundary Problems in Potential Theory After Their Numerical Analysis. *International Journal of Computing*, 8(2), 149–156.
- Morrison, J. A., & Lewis, J. A. (1976). Charge Singularity at the Corner of a Flat Plate. *SIAM J. Appl. Math.*, 31(2), 233–250. <https://doi.org/10.1137/0131019>
- Serre, J.-P. (1977). Linear Representations of Finite Groups (Graduate Texts in Mathematics) (v. 42) 1st ed. 1977. *Corr. 5th printing 1996 Edition*. Springer-Verlag: New-York-Heidelberg-Berlin.
- Sybil, Yu. M. (1997). Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. *Matem. studii*, 8(2), 79–96.
- Voss, M. J. (Ed.). (2003). *OpenMP share memory parallel programming*. Toronto, Canada, 270 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-45009-2>
- Zakharov, E. V., Safronov, S. I., & Tarasov, R. P. (1992). Abelevy gruppy konechnogo poriadka v chislennoy analize lineynykh kraevykh zadach teorii potenciala. *Zhurn. vychisl. matematiki i matem. fiziki*, 32(1), 40–58. [in Russian].

## АПОСТЕРИОРНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ И РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

На модельном примере рассмотрены апостериорный метод оценки погрешности и процедура распараллеливания для численного решения одного класса задач электронной оптики. Учитывается тот факт, что поверхность, на которой определены краевые условия, обладает абелевой группой симметрии шестнадцатого порядка. Усовершенствована общая методика, которая основывается на методе интегральных уравнений. Специфику смоделированной проблемы учтено на основании аппарата теории групп. Используя аппарат теории групп, удалось свести исходную задачу к решению последовательности шестнадцати независимых интегральных уравнений, где интегрирование ведется только по одной из конгруэнтных составляющих поверхности. Это создало все предпосылки для распараллеливания процедуры решения задачи в целом. Процедуру распараллеливания проведено с использованием программного средства *OpenMP*. Для получения приближенных значений искомой "плотности распределения зарядов" в соответствующих двумерных интегральных уравнениях использован метод коллокации. С целью учета сингулярного поведения решения в окрестности контура разомкнутой поверхности построен апостериорный метод оценки погрешности. Для подтверждения уместности и оценки эффективности методики проведен ряд численных экспериментов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; абелева группа симметрии; интегральные уравнения; многоядерность процессора; программное средство *OpenMP*.

## THE A POSTERIORI METHOD OF ERROR EVALUATION AND PARALLELIZATION OF CALCULATING FOR ONE CLASS OF PROBLEMS OF THE ELECTRONIC OPTICS

The electron-optical systems are basic components of the modern research complexes by the help of which complicated physical processes related to motion of the charged particles in the corresponding potential fields are studied. The real electron-optical systems have a great number of the charged electrodes of the complicated configuration. Therefore, the use of economic collocation method under the conditions of cobbed-permanent approximation of the sought density requires the numeral solving the systems of linear algebraic equations of large dimensions with the densely filled matrices. In the one model example, the a posteriori method of error evaluation and parallelization of the procedures for a class of problems of electronic optics is considered. It is also considered that the connected open surface where boundary conditions are set obtains the Abelian group of symmetry of the sixteenth order. Such problems arise in the mathematical modeling of electronic optics systems. The general method based on integral equation method was improved. Specificity of the problem was taken into account by use of group theory apparatus. This article shows how using the apparatus of the group theory it is possible to solve an initial problem by the help of the sequence of the sixteen independent integral equations, where the integration is realized only on one of the congruent constituents of the surface. It creates the conditions for parallel processes of problem solution in general. The procedure of parallelization was realized with the help of the most popular means of *OpenMP*. The collocation method for obtaining approximate values of needed "density of charge distribution" in the particular two-dimensional integral equations is used. To take into account the singular way of solving the problem in the circuit of the open surface the a posteriori method of error evaluation is created. The account of specificity of the open-circuit surfaces allows to decrease the amount of the controlled special points considerably and in the best case to deal only with one. It also substantially simplifies the algorithm of calculations. To prove the reliability and estimation of the technique efficiency the number of numerical experiments is carried out. For the representation of the electrostatic field equipotential lines are used, thus, solutions are analysed by the help of distribution of lines of even potential.

**Keywords:** mathematical modeling; abelian group of symmetry; integral equations; multi-core processors; software *OpenMP*.